32.4. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geqslant a$; 2) $x_{lk} \leqslant b$, где a и b — постоянные величины.

1. Если $x_{lk} \geqslant a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы l-го поставщика и запросы k-го потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$). В полученном оптимальном решении следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a.

2. Если $x_{lk} \leqslant b$, то необходимо вместо k-го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b'_k = b$, а другой с номером $n + 1$ — запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M ($M \gg 1$). После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n + 1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ — самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l,\ n + 1)$ останется пустой ($x_{l(n+1)} = 0$) и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b.

32.33. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 32.6, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от второго поставщика второму потребителю должен быть не менее 200 единиц ($x_{22} \geqslant 200$), а от третьего первому — не более 300 единиц ($x_{31} \leqslant 300$).

Таблица 32.6

$a_i \backslash b_j$	600	500	400
300	2	9	10
400	2	11	13
500	4	10	12

Решение. Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки x_{22} был не менее 200 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика a_2 и запросы второго потребителя b_2 меньше фактических на 200 единиц. После получения оптимального решения объем перевозки x_{22} увеличим на 200 единиц.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \leqslant 300$, вместо первого потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы $b_1 = 300$ единиц и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4 = 600 - 300 = 300$ единиц и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у первого потребителя, за исключением c_{34}, которую примем равной сколь угодно большому числу M, т.е. $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид:

$a_i \backslash b_j$	300	300	400	300
300	2	9	10	2
200	2	11	13	3
500	4	10	12	M

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 300 + 200 + 500 = 1000;$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 300 + 300 + 400 + 300 = 1300.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1300 - 1000 = 300$ единиц (табл. 32.7).

Таблица 32.7

X_1		$v_1 = 2$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$
	a_i \ b_j	300	300	400	300
$u_1 = 0$	300	2: 300 −	9: −	10: −	2: 0 +
$u_2 = 1$	200	2: $\boxed{0}$	11: −	13: −	3: 200
$u_3 = 10$	500	4: $\boxed{8}$ +	10: 300	12: 200 −	M: −
$u_4 = -2$	300	0: $\boxed{0}$	0: −	0: 200 +	0: 100 −

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости и находим потенциалы (см. табл. 32.7). Вычисляем оценки для свободных клеток таблицы. Все оценки неположительные, кроме оценки $\Delta_{31} = 8$. Находим цикл для клетки (3, 1). Он состоит из клеток (3, 1), (1, 1), (1, 4), (4, 4), (4, 3), (3, 3). Находим величину груза для перераспределения по означенному циклу $\theta = \min\{200, 100, 300\} = 100$ при $(i, j) = (4, 4)$. Осуществляем сдвиг по этому циклу на величину $\theta = 100$, получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.8).

Таблица 32.8

X_2		$v_1 = 4$	$v_2 = 10$	$v_3 = 12$	$v_4 = 4$
	a_i \ b_j	300	300	400	300
$u_1 = -2$	300	2: 200	9: −	10: $\boxed{0}$	2: 100
$u_2 = -1$	200	2: $\boxed{0}$	11: −	13: −	3: 200
$u_3 = 0$	500	4: 100	10: 300	12: 100	M: −
$u_4 = -12$	300	0: −	0: −	0: 300	0: −

Решение X_2 оптимальное, так как все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки x_{22} на 200 единиц и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с объемами перевозок первого потребителя. Получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$$

32.5. Транспортная задача по критерию времени

Задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной транспортной задаче, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известны t_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ — интервалы времени, за которые груз доставляется от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и наибольшее время доставки всех грузов является минимальным.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим x_{ij} — объем перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю. Система ограничений задачи не отличается от системы ограничений обычной транспортной задачи. Пусть $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ — некоторое опорное решение задачи. Запишем целевую функцию задачи. Обозначим через $T(X)$ наибольшее значение элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, соответствующих клеткам таблицы, занятым опорным решением: $T(X) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}$. Таким образом, за время $T(X)$ план перевозок будет выполнен полностью.

Математическая модель транспортной задачи по критерию времени имеет вид

$$T(X) = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \to \min, \tag{32.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{32.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{32.13}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{32.14}$$

Задача решается в следующем порядке. Находится начальное опорное решение X_1. Определяется значение целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_1 k_1}$. Все свободные клетки, которым соответствуют значения $t_{ij} > T(X_1)$, исключаются из рассмотрения (перечеркиваются). Занимать эти клетки нецелесообразно, так как увеличится значение целевой функции. Чтобы уменьшить ее значение, необходимо освободить клетку (l_1, k_1), в которой t_{ij} достигает максимума. Для этого строят так называемые **разгрузочные** циклы, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки (l_1, k_1), расставляются поочередно знаки «−» и «+» и осуществляется сдвиг на величину $\theta = \min\limits_{\text{«}-\text{»}} \{x_{ij}\}$. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение X_2, на котором значение целевой функции меньше, чем на X_1. Далее снова пытаются разгрузить клетку, соответствующую $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0} \{t_{ij}\} = t_{l_2 k_2}$. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.

32.42. Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для следующей задачи:

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

Решение. Составим начальное опорное решение X_1 методом северо-западного угла (табл. 32.9). Максимум целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0} \{13, 8, 7, 9, 5, 10, 4\} = 13$ достигается в клетке (1, 1). Перечеркнем клетки (4, 1) и (4, 3), в которых время доставки груза $t_{41} = 19$ и $t_{43} = 14$ больше $T(X_1) = 13$.

Таблица 32.9

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	13; 20 −	8; 10 +	7	11
40	6; +	7; 30 −	9; 10	8
50	5	12	5; 40	10; 10
60	~~19~~	6	~~14~~	4; 60

Таблица 32.10

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	~~13~~	8; 30 +	7	~~11~~
40	6; 20	7; 10	9; 10 −	8; +
50	5	~~12~~	5; 40 +	10; 10 −
60	~~19~~	6	~~14~~	4; 60

Для улучшения решения разгружаем клетку (1, 1) с помощью цикла (2, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2) (см. табл. 32.9). В означенном цикле находим $\theta = \min\limits_{\leftrightarrow} \{20, 30\} = 20$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.10). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij} > 0} \{8, 6, 7, 9, 5, 10, 4\} = 10$ достигается в клетке (3, 4). Перечеркиваем клетки (1, 1), (1, 4) и (3, 2), в них время $t_{11} = 13$, $t_{14} = 11$ и $t_{32} = 12$ больше, чем $T(X_2) = 10$. Разгружаем клетку (3, 4) с помощью цикла (2, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3). В означенном цикле находим $\theta = \min\limits_{\leftrightarrow} \{10, 10\} = 10$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем третье опорное решение X_3 (табл. 32.11).

Таблица 32.11

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	~~13~~	30 (8)	7	~~11~~
40	20 (6)	10 (7)	~~9~~	10 (8)
50	5	~~12~~	50 (5)	~~10~~
60	~~19~~	6	~~14~~	60 (4)

Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_3) = \max\limits_{x_{ij} > 0} \{8, 6, 7, 8, 5, 4\} = 8$ достигается в клетках (1, 2) и (2, 4). Перечеркиваем клетки (2, 3) и (3, 4), в которых время больше, чем $T(X_3) = 8$. С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (1, 2) и (2, 4) не удается, поэтому X_3 является оптимальным решением.

Ответ: $\min T(X) = 8$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$.